SESIÓN 6

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA, REGLA GENERAL PARA DERIVACIÓN, REGLAS PARA DERIVAR FUNCIONES ALGEBRAICAS.

I. CONTENIDOS:

1. Interpretación geométrica de la derivada
2. Regla general para la derivación
3. Fórmulas para derivar funciones algebraicas
4. Ejercicios resueltos (1)

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Derivará sumas, productos y cocientes.
- Distinguirá los casos en los que se aplican las reglas de derivación.

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- En una operación matemática que contiene signos de agrupación, ¿qué se hace primero?
- ¿Existen expresiones matemáticas donde se realicen dos veces la misma operación?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Interpretación geométrica de la derivada

En esta parte de nuestro curso vamos a considerar un teorema que es fundamental en todas las aplicaciones de cálculo diferencial a la geometría. Para empezar recordemos de nuestras lecciones anteriores la definición de *tangente* a una curva en un punto dado *P* de la misma.

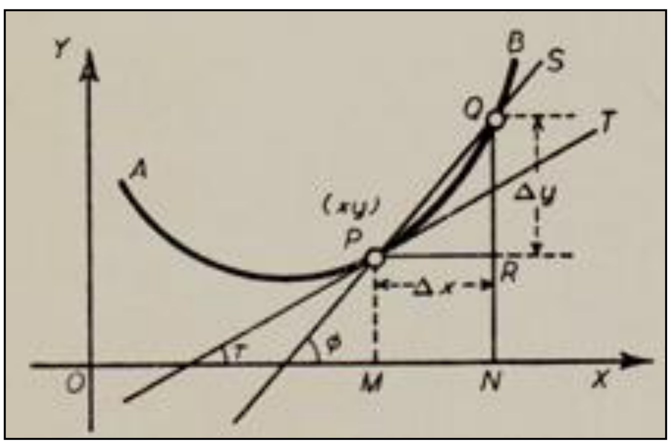

Fig.1

Consideremos una recta secante que pasa por el punto *P* de nuestro interés y un punto próximo a este y llamémosle el punto *Q.* Ahora hagamos que este punto *Q* se mueva sobre la curva y se aproxime tanto como nosotros queramos al punto *P* pero sin tocarlo. Para que esto se logre la secante tendrá que girar en torno al punto *P*, y su posición límite, será por definición, la tangente a la curva en el punto *P*. Veamos la gráfica de la función f(x), es decir, la curva *AB,* la cual está especificada por la ecuación:

$$y = f(x)$$

Procedamos ahora a dar incrementos a las funciones e interpretemos cada uno de ellos geométricamente, para esto escojamos un punto *P,* definido por las coordenadas (*x,y*), es decir, *P(x,y)*, y escojamos el punto *Q*, el cual estará definido por las coordenadas *Q*$(x+\Delta x\,,\ y+\Delta y)$, sistematizando estos pasos, tenemos:

Primer paso $\quad y+\Delta y = f(x+\Delta x) \qquad = NQ$

Segundo paso $\quad y+\Delta y = f(x+\Delta x) \qquad = NQ$

Restando la función original $\quad -y \qquad = -f(x) \qquad = MP = NR$

$$\Delta y\ = f(x+\Delta x) - f(x) \qquad = RQ$$

Tercer paso $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{RQ}{MN} = \frac{RQ}{PR}$

$$= \tan \measuredangle RPQ = \tan\phi$$

= Pendiente de la secante PQ

Obsérvese que mediante este paso determinamos que la razón de los incrementos Δy y Δx es igual a la pediente de la secante en los puntos $P(x,y)$ y $Q(x+\Delta x\,,\ y+\Delta y)$ sobre la gráfica. Para finalizar con el cuarto paso, consideremos lo siguiente, por la figura podemos ver que:

$$\phi = inclinación\ de\ la\ secante\ PQ$$

$$\tau = inclinación\ de\ la\ tangente\ PT$$

Como $\lim_{\Delta x\to o} \phi = \tau$ suponiendo que $\tan\phi$ es una función continua se tiene finalmente el cuarto paso.

Cuarto paso $\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\ \tan\phi = \tan\tau$

$$= Pendiente\ de\ la\ tangente\ en\ el\ punto\ P$$

De esta manera hemos deducido un importante teorema del cálculo diferencial que establece lo siguiente:

Teorema: *"El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto"*

2.1. Regla general para la derivación

De acuerdo a lo visto anteriormente se establecer un procedimiento sistemático para derivar una función continua que comprende los siguientes pasos:

Paso uno: *Se sustituye en la función* x *por* $x+\Delta x$ *, y se calcula el nuevo valor de la función* $y+\Delta y$

Paso dos: *Se resta el valor original de la función del nuevo valor incrementado y se obtiene* Δy*, que es el incremento de la función.*

Paso tres: *Se divide el incremento de la función* (Δy) *entre el incremento de la variable independiente* (Δx)

Paso cuarto: *Se calcula el límite de este cociente cuando hacemos tender* Δx *a cero, el límite obtenido es la derivada de la función.*

La regla anterior tiene gran importancia, ya que se dedujo directamente de la definición de derivada, es de vital importancia que el estudiante se familiarice con ella.

En la práctica muchas veces resulta difícil y complicado, sobre todo en funciones polinomiales y/o fraccionarias,

aplicar la regla general, por lo que se han deducido a partir de esta, procedimientos especiales para derivar funciones con ciertas características que se presentan normalmente.

3.1. Fórmulas para derivar funciones algebraicas

Resulta conveniente describir estas reglas especiales por medio de fórmulas de las cuales a continuación nos ocuparemos. Se sugiere al estudiante aprenderlas de memoria y poder enunciarlas con palabras.

En estas fórmulas, u, v, w representan funciones continuas derivables de x y c representa una constante.

A modo de ejemplo derivaremos la primera y segunda fórmula aplicando la regla general y dando su interpretación geométrica.

1. Derivada de una constante: Sea c una constante dada, tenemos entonces:

$$y = c$$

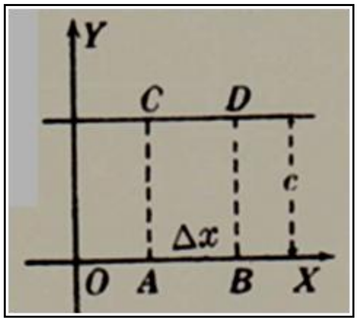

Fig. 2

Consideremos, de acuerdo a la figura

OA= x_1 Que es un valor determinado de la variable independiente x

AB= Δx Es el incremento de la variable independiente x

Designemos por Δy el incremento de la función, entonces tenemos.

Función incrementada $y + \Delta y = c$

Incremento de la función $\Delta y = 0$ El valor de la función no se altera cuando x sufre un incremento Δx

Razón de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

Entonces el valor de la derivada es $\lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} = 0$ Ya que $y = c$

Por lo que podemos establecer que: *La derivada de una constante es igual a cero.*

2. Derivada de una variable con respecto a si mima

Considérese que $y = x$, al efectuar los cuatro pasos para derivar una función tenemos:

$y + \Delta y = x + \Delta x$ Función incrementada

$-y \quad = -x$ Restar la función original

$\Delta y = \Delta x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ Razón de los incrementos

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 1$ Ya que $\Delta y = \Delta x$

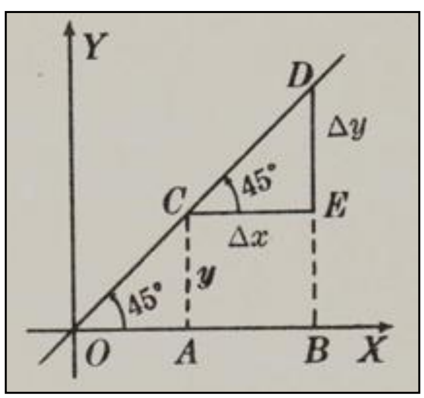

Fig. 3

De la figura podemos ver que:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 = \tan 45^o = 1$

Por lo que podemos establecer que: *La derivada de una variable independiente, con respecto a si misma es igual a la unidad.*

Mediante este procedimiento se pueden hallar las siguientes fórmulas

3. Derivada de una suma de funciones: *La derivada de una suma de un número finito de funciones, es igual a la suma algebraica de las derivadas de cada una de las funciones.*

Traducido esto a un lenguaje simbólico, tenemos:

$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$ Siendo: $y=u+v-w$

4. Derivada del producto de una constante por una función: *La derivada del producto de una constante por una función, es igual al producto de la constante por la derivada de la función:*

Lo anterior expresado en lenguaje matemático es:

$\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}$ Siendo: $y=cv$

5. Derivada del producto de dos funciones: *La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, mas el producto de la segunda función por la derivada de la primera función.*

$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$ Siendo: $y=uv$

6. Derivada de la potencia de una función, con exponente constante: *La derivada de la potencia de una función con exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada al mismo exponente menos uno por la derivada de la función.*
$\frac{d}{dx}(v^n)=nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

En el caso especial que $v=x$ la formula anterior se convierte en:

$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

7. Derivada de un cociente de funciones: *La derivada de un cociente de funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo esto dividido entre el cuadrado del denominador.*

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ Siendo $v\neq 0$

En el caso especial que el denominador sea constante, es decir, $v=c$ la fórmula anterior toma la forma:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\frac{du}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{c}$

La derivada del cociente de una función dividida por una constante es igual a la derivada de la función dividida entre la constante.

4.1. Ejercicios resueltos (1)

1. Aplicando los cuatro pasos de la regla general encuentre la derivada de la función: $y=3x^2+5$

Primer paso $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$

Segundo paso $y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$

$$-y \qquad = -3x^2 \qquad\qquad\qquad - 5$$

$$\Delta y = \qquad 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

Tercer paso $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$

Cuarto paso $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x$ Recuerde que en el segundo miembro de ecuación $\Delta x \to 0$

Finalmente $\frac{dy}{dx} = 6x$ Que es la derivada de la función

2. Aplicando los cuatro pasos de la regla general encuentre la derivada de la función $y = x^2 + 3x + 5$

(1) $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x)^2 + 5 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3x + 3\Delta x + 5$

(2) $\Delta y = (2x + 3)\Delta x + (\Delta x)^2$ Esto da restando la función original y factorizando

(3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x+3)\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x$

(4) $\lim_{\Delta x \to 0} 2x + 3 + \Delta x$ Finalmente $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$ Que es la derivada de la función